Durée : 2 heure

Toute calculatrice autorisée

– Exercice 1 – (*3 points*)

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points :

$$A(-2;3), \qquad B(3;4), \qquad \text{et} \qquad C(7;3).$$

1. Calculer les coordonnées des points D, E, F, G définis de la façon suivante :
   — D est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}\,(6;-2)$;
   — $ADBE$ est un parallélogramme ;
   — F est le symétrique de C par rapport à A ;
   — G est le symétrique de B par rapport au milieu de $[AD]$.
2. Les points B, C et E sont-ils alignés ? (Justifier la réponse par un calcul.)
3. Démontrer que $CEFG$ est un parallélogramme.

– Exercice 2 – (*4 points*)

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$; E, F, G, et H sont les milieux respectifs de $[AD]$, $[DB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{FH}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{FG} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}\right)$.
3. Démontrer que $\overrightarrow{EH} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}\right)$.
4. Démontrer que les points E, G, H et F sont alignés.

– Exercice 3 – (*6 points*)

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x) = 1 - \dfrac{6}{x+2}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.

2. a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$

b. On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$. Donner le tableau de variations de la fonction f.

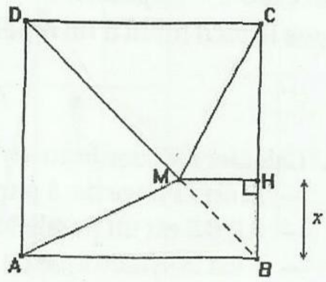
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-1)=-3$ et $g(3)=1$.
Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

4. a. Montrer pour tout réel $x \neq -2$, $f(x)-g(x)=\dfrac{x-x^2}{x+2}$.

b. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

– Exercice 4 – (*7 points*)

$ABCD$ est un carré de côté 4, M un point de la diagonale $[BD]$ et H le projeté orthogonal de M sur $[BC]$.
On pose $BH = x$.
Le but de cet exercice est de déterminer pour quelle valeur de x le trapèze $ABHM$ et le triangle DMC ont la même aire.



Rappel : l'aire d'un trapèze de grande base $\mathscr{B}$, de petite base b et de hauteur h est donnée par : $\mathscr{S} = \frac{1}{2}(\mathscr{B} + b)h$.

Partie A : Traduction mathématique des données

1. a. À quel intervalle I appartient x ?

b. *Démontrer que* $HM = x$.

2. a. On note $\mathscr{S}(x)$ l'aire du trapèze $ABHM$. Démontrer que $\mathscr{S}(x)=\dfrac{1}{2}x(x+4)$.

b. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du triangle DMC. Démontrer que $\mathscr{A}(x)=2(4-x)$.

Partie B : Étude des fonctions en jeu

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x(x+4)$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2(4-x)$.

1. *Étude de f*

[(a)]

a. Démontrer que $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+2)^2-2$.

b. Démontrer que la fonction f admet un minimum en $x=-2$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;-2]$ puis sur l'intervalle $[-2;+\infty[$, par la méthode de votre choix.
Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ et retrouver alors le résultat du 1.(b).

d. Faire un tableau de valeurs de pas 0,2 pour la fonction f sur l'intervalle $[-3;-2]$.

2. *Étude de g*

   La fonction g est de quel type ? Quel est son sens de variation ? Justifier.

3. *Tracé des courbes*

   Page suivante, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormal. Dans le même repère, :

   a. tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;

   b. faire apparaître la courbe représentative $\mathscr{C}_{\mathscr{S}}$ de la fonction $\mathscr{S}$, définie sur l'intervalle I ;

   c. faire apparaître la courbe représentative $\mathscr{C}_{\mathscr{A}}$ de la fonction $\mathscr{A}$, définie sur l'intervalle I.

   On utilisera des couleurs différentes pour faciliter la visualisation des différentes courbes.

Partie C : Résolution du problème

On se propose de déterminer finalement la valeur de x pour laquelle $\mathscr{S}(x) = \mathscr{A}(x)$.

1. **Résolution graphique**

   En utilisant les courbes représentatives de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ de la partie précédente, déterminer graphiquement une valeur approchée de la valeur de x pour laquelle $\mathscr{S}(x) = \mathscr{A}(x)$. Expliquer.

2. **Résolution algébrique**

   Démontrer que $\mathscr{S}(x) = \mathscr{A}(x)$ équivaut à $(x+4)^2 = 32$.

   En déduire la valeur exacte de x pour laquelle le trapèze $ABHM$ et le triangle DMC ont la même aire.

Courbe représentative de f