DST n° 1 de mathématiques

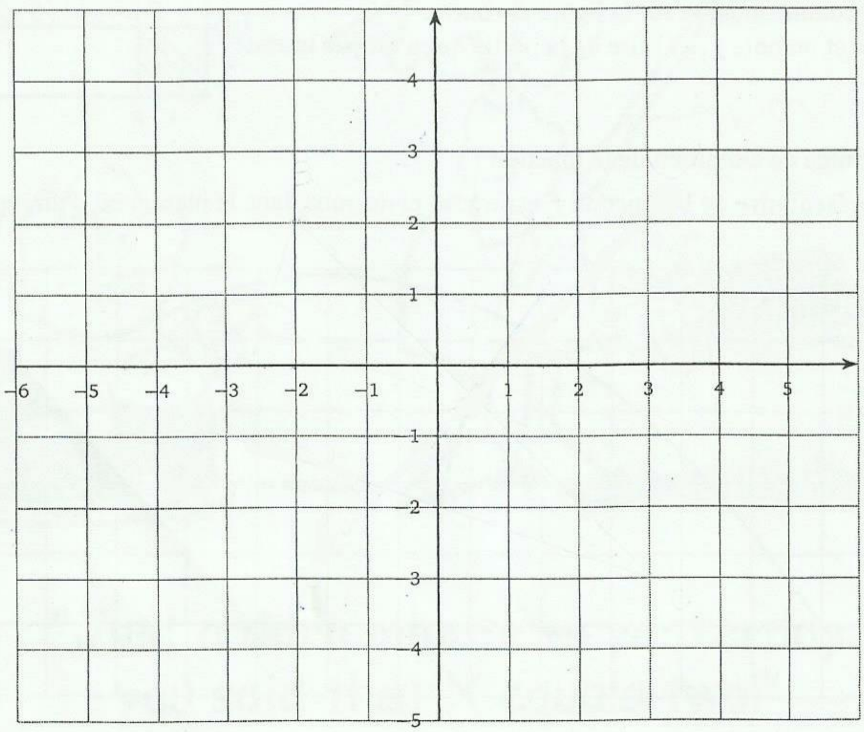
- Durée : 2 heures.
- Les calculatrices sont autorisées.
- Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.
- Vous pouvez admettre le résultat d'une question et l'utiliser pour répondre à la suivante.

Exercice 1

14 pts

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J) et on considère les points $A(-3\ ;\ -1)$, $B(-2\ ;\ 2)$ et $C(3\ ;\ -3)$.

1. Faire une figure dans le repère ci-dessous, qui sera complétée par la suite.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Montrer que les coordonnées du point H, centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, sont $\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.
4. Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
5. Le point $D(-2\ ;\ -3)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?
6. Déterminer les coordonnées du point D' symétrique du point D par rapport au point H.
7. Soit F un point du plan d'ordonnée $-\frac{5}{2}$ et d'abscisse inconnue notée t.
   (a) Vérifier que pour tout nombre réel x, $4x^2+20x+21=(2x+7)(2x+3)$.
   (b) Quel(les) valeur(s) faudra-t-il donner à t pour que le triangle AFD soit rectangle en F ?
   ☞ Utiliser le théorème de Pythagore et la question précédentes



Exercice 2

8 pts

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-8;5]$. Son tableau de variations est le suivant :

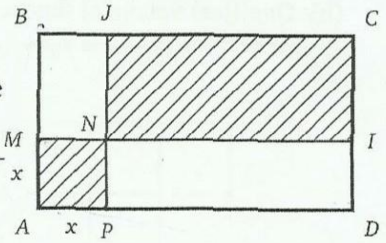
x	-8		-5		-3		2		5
$f(x)$	6	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

1. Décrire le sens de variations de f par des phrases.
2. Comparer $f\left(-\dfrac{17}{3}\right)$ et $f(-6)$; justifier votre réponse.
3. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
5. Pour chacune des propositions suivantes, justifier : si elle est vraie ; si elle est fausse ou si le tableau ne permet pas de conclure.
   (a) « Si x est un réel de l'intervalle $[-8;-3]$ alors $f(x) \in [3\ ;\ 6]$. »
   (b) « Si $-2 \leqslant f(x) \leqslant 0$ alors $2 \leqslant x \leqslant 5$. »
   (c) « Tous les réels de l'intervalle $[-8;0]$ ont une image supérieure ou égale à 1. »

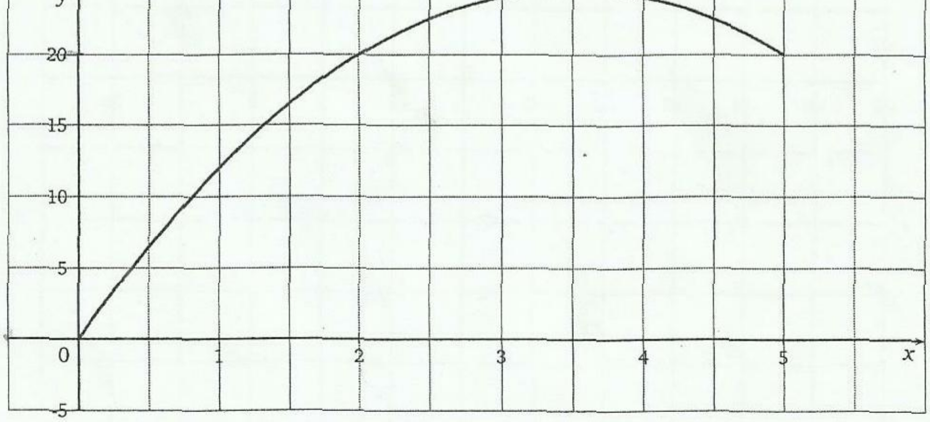
Exercice 3

10 pts

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 9$.
M étant un point du segment $[AB]$, on construit le carré $AMNP$ et le rectangle $NICJ$ comme indiqué sur la figure ci-contre.
On pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire de la partie qui n'est pas hachurée.



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. La courbe représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



À l'aide du graphique, déterminer :

(a) la position du point M pour que l'aire de la partie non hachurée soit maximale ;

(b) l'intervalle sur lequel l'aire de la partie non hachurée est inférieure ou égale à 20.

3. Montrer que la fonction f est définie par $f(x) = 14x - 2x^2$.
4. Calculer $f\left(2+\sqrt{3}\right)$. Est-il possible que l'aire de la partie non hachurée soit supérieure à $\frac{99}{4}$?
5. Déterminer les positions éventuelles du point M pour que l'aire de la partie non hachurée soit égale au double de l'aire du carré $AMNP$.

Exercice 4

8 pts

Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{2x^2-1}{x^2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer l'image de -2 par f ?
3. Que vaut $f\left(2\sqrt{3}\right)$?
4. Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ -1\right)$ appartient-il à la courbe représentative de f ?
5. Déterminer les éventuels antécédents de 1 par f ?
6. Existe-t-il des antécédents de 3 par f ? Justifier la réponse.