Durée : 2 heure

Toute calculatrice autorisée

– Exercice 1 –

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{u}\,(x+1; x-1)$ et $\vec{v}\,(9(x-1); x+1)$.

Comment faut-il choisir le nombre x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires ?

– Exercice 2 – $ABCD$ est un trapèze rectangle de bases $AD = 6$ cm, $CB = 2$ cm, de hauteur $AB = 4$ cm. H est le projeté orthogonal de C sur $[AD]$. Un point M décrit le segment $[AB]$ et on pose $AM = x$. La parallèle à (AD) passant par M coupe $[CD]$ en N et la parallèle à (AB) passant par N coupe $[AD]$ en P.

1. **a.** Démontrez que le triangle CHD est un triangle rectangle isocèle.

   b. Démontrez que $AMNP$ est un rectangle et NPD un triangle rectangle isocèle.

2. On appelle $f(x)$ l'aire du rectangle $AMNP$ lorsque x décrit l'intervalle $[0; 4]$.

   a. Démontrez que $f(x) = x(6-x)$ et vérifiez que

   $$f(x) = 9 - (x-3)^2.$$

   b. Recopiez puis complétez le tableau suivant.

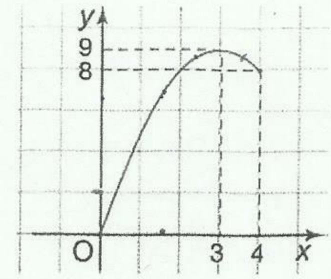
longueur AM, x	0	1	2	2,5	3	4
aire de $AMNP$, $f(x)$						

3. Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ sur l'intervalle $[0; 4]$.

   Par lecture graphique, répondez aux questions suivantes.

   a. Lorsque $AM = \frac{1}{4}AD$, quelle est l'aire de $AMNP$?

   b. Pour quelle position de M l'aire du rectangle $AMNP$ semble-t-elle maximale ?



c. Sur quel segment faut-il choisir le point M pour que l'aire du rectangle soit supérieure ou égale à 8 cm^2 ?

d. Vérifiez qu'il existe deux points M pour lesquels l'aire du rectangle est égale à $\frac{17}{2}$ cm^2.

4. Répondez aux questions suivantes en choisissant pour $f(x)$ l'expression la mieux adaptée.

a. Démontrez que $f(x) \leq 9$. Peut-on affirmer cette fois que l'aire du rectangle est maximale lorsque $x = 3$? Quelle est la nature de $AMNP$ lorsque $x = 3$?

b. Trouvez les valeurs **exactes** de x pour lesquelles l'aire du rectangle $AMNP$ est égale à $\frac{17}{2}$ cm^2.

– Exercice 3 –

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A\left(-1; \frac{3}{2}\right)$, $B\left(2; \frac{5}{2}\right)$, $C\left(0; \frac{5}{2}\right)$ et $D\left(\frac{7}{2}; -1\right)$.

1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

b. Démontrer que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Dans toute la suite de l'exercice, on notera M le point d'intersection des droites (AB) et (CD) et $(x_M; y_M)$ ses coordonnées.

2. a. Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

b. Exprimer alors les coordonnées de M en fonction de k.

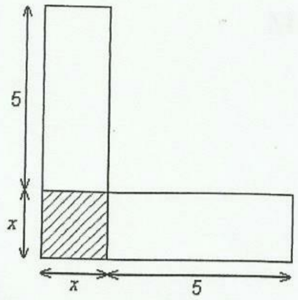
c. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{CM}$ en fonction de k.

d. En utilisant la condition de colinéarité entre les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$, déterminer la valeur de k.

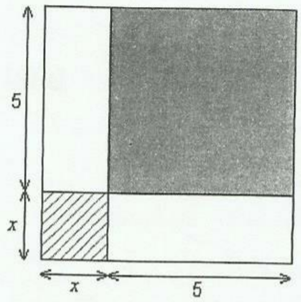
e. En déduire les coordonnées du point M.

– Exercice 4 –

1. On considère la figure ci-contre qui représente une équerre.
   Soit $x > 0$. Exprimer en fonction de x :
   a. l'aire du carré hachuré ;
   b. l'aire d'un des rectangles blancs ;
   c. l'aire totale de l'équerre.



2. On complète la figure par le carré gris.
   a. Quelle est son aire ?
   b. Exprimer de deux façons différentes l'aire totale de la figure.
   c. En déduire que $x^2 + 10x = (x + \cdots)^2 - \cdots$
   d. Vérifier par le calcul que cette égalité reste vraie pour tout x réel.



3. En déduire les solutions de l'équation $x^2 + 10x = 21$.