Nom :

Prénom :

DTL n°1

Vendredi 22 septembre 2017

Durée : 2 heures

Toutes calculatrices autorisées.

<u>Exercice 1</u> *(4 points)*

a) Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{5x^2-3x+1}$.

b) Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{5} - \frac{5}{x}$.

c) Calculer la dérivée de la fonction u définie sur $[0\,;9]$ par $u(x) = \frac{2-x}{2+x}$

d) Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x^2 - 5x - 2)^2$

Exercice 2 *(9 points)*

L'entreprise Co Ton produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise Co Ton est donné en fonction de la longueur x par la formule

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

Le graphique de l'annexe 1 donne la représentation graphique de la fonction C.

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

1. Tracer sur le graphique de l'annexe 1 la droite D_1 d'équation $y = 400x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise Co Ton ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

a. On a tracé sur l'annexe 1 la droite D_2 d'équation $y = 680x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

b. On considère la fonction B définie sur l'intervalle [0 ; 10] par

$$B(x) = 680x - C(x).$$

Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 10] on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180.$$

c. Étudier les variations de la fonction B sur [0 ; 10].
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise Co Ton est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite.
On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle [0 ; 10] par

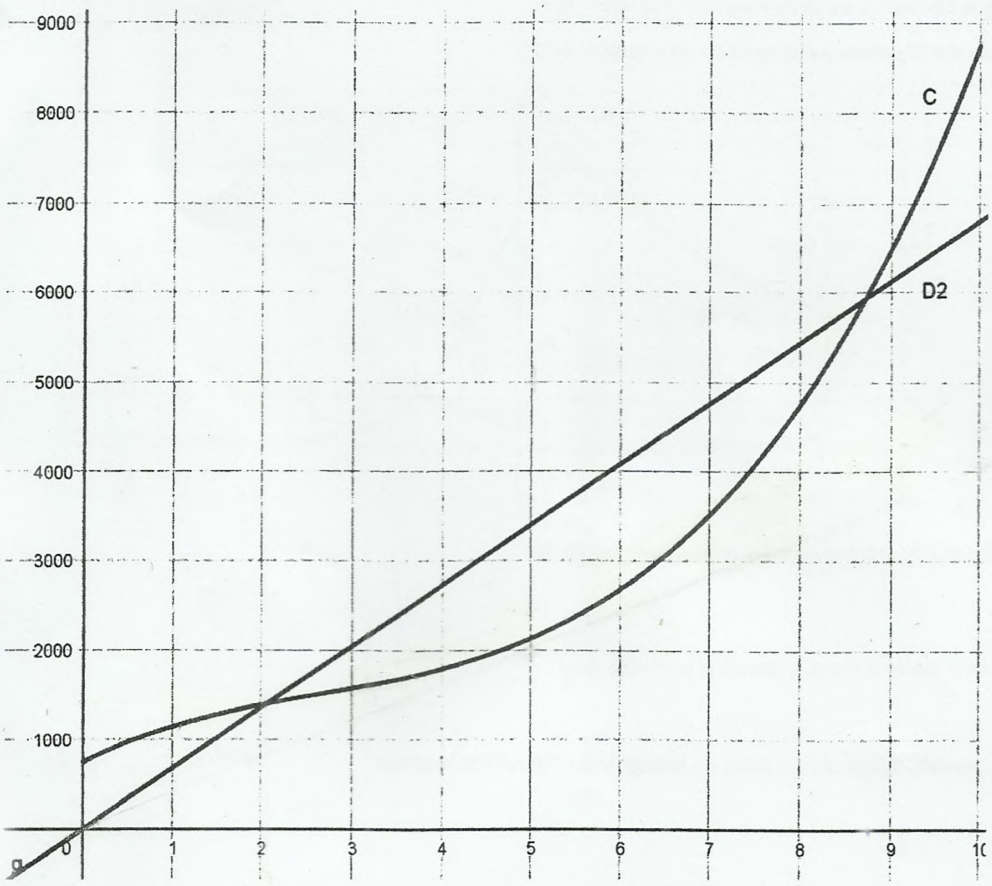
$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

On admet que $$C_M'(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$$

1. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle]0 ; 10], $C_M'(x)$ est du signe de $(x-5)$. En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle]0 ; 10].

b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum? Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

<u>Annexe 1</u> (exercice 3) – à rendre avec la copie



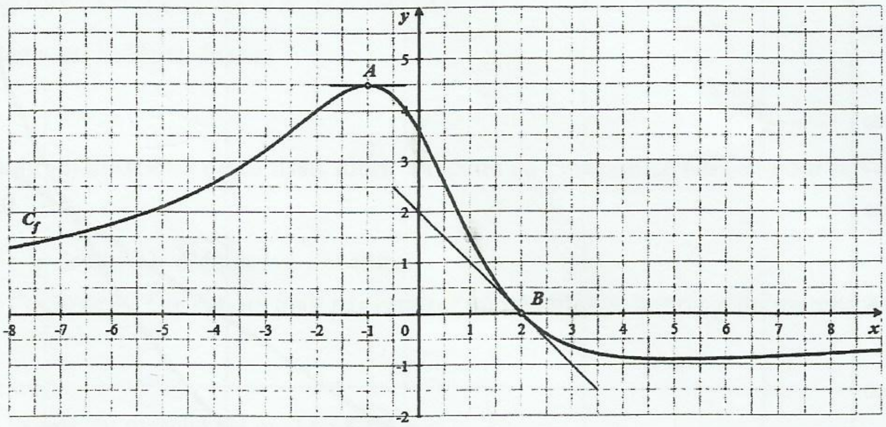
Exercice 3 *(7 points)*

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que :

— la tangente au point $A\left(-1; \dfrac{9}{2}\right)$ à la courbe C_f est parallèle à l'axe des abscisses ;

— La tangente au point $B\,(2; 0)$ à la courbe C_f passe par le point de coordonnées $(0; 2)$.



On note $f\,'$ la dérivée de la fonction f. À partir du graphique et des renseignements fournis :

1. Déterminer $f\,'(-1)$ et $f\,'(2)$.
2. La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x + \dfrac{7}{2}$.
   Déterminer $f\,(1)$ et $f\,'(1)$.
3. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en JUSTIFIANT sa réponse :
   a. $f\,'(0) \times f\,'(3) \leqslant 0$.
   b. $f\,'(-3) \times f\,'(1) \leqslant 0$.

PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f\,(x) = \dfrac{18 - 9x}{x^2 + 5}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f\,'(x) = \dfrac{9\left(x^2 - 4x - 5\right)}{\left(x^2 + 5\right)^2}$.
2.
   a. Étudier le signe de $f\,'(x)$.
   b. Donner le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse (-2).