**Nom :**

**Prénom :**

# *DTL n°1*

*Vendredi 22 septembre 2017*
*Durée : 2 heures*
*Toutes calculatrices autorisées.*

**Exercice 1** *( 4 points)*

a) Calculer la dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{5x^2-3x+1}$ .

b) Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{5} - \frac{5}{x}$ .

c) Calculer la dérivée de la fonction $u$ définie sur $[0\,;9]$ par $u(x) = \frac{2-x}{2+x}$

d) Calculer la dérivée de la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x^2 - 5x - 2)^2$

**Exercice 2** *( 9 points)*

L'entreprise Co Ton produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur $x$ exprimée en kilomètre, $x$ étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise Co Ton est donné en fonction de la longueur $x$ par la formule

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

Le graphique de l'annexe 1 donne la représentation graphique de la fonction $C$.

**Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes**

**Partie A : Étude du bénéfice**

Si le marché offre un prix $p$ en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité $x$ est égal à $R(x) = px$.

**1.** Tracer sur le graphique de l'annexe 1 la droite $D_1$ d'équation $y = 400x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise Co Ton ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix $p$ du marché est égal à 400 euros.

**2.** Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

**a.** On a tracé sur l'annexe 1 la droite $D_2$ d'équation $y = 680x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix $p$ du marché est de 680 euros.

**b.** On considère la fonction $B$ définie sur l'intervalle [0 ; 10] par

$$B(x) = 680x - C(x).$$

Démontrer que pour tout $x$ appartenant à l'intervalle [0 ; 10] on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180.$$

**c.** Étudier les variations de la fonction $B$ sur [0 ; 10].
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise Co Ton est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

**Partie B : Étude du coût moyen**

On rappelle que le coût moyen de production $C_M$ mesure le coût par unité produite.
On considère la fonction $C_M$ définie sur l'intervalle [0 ; 10] par

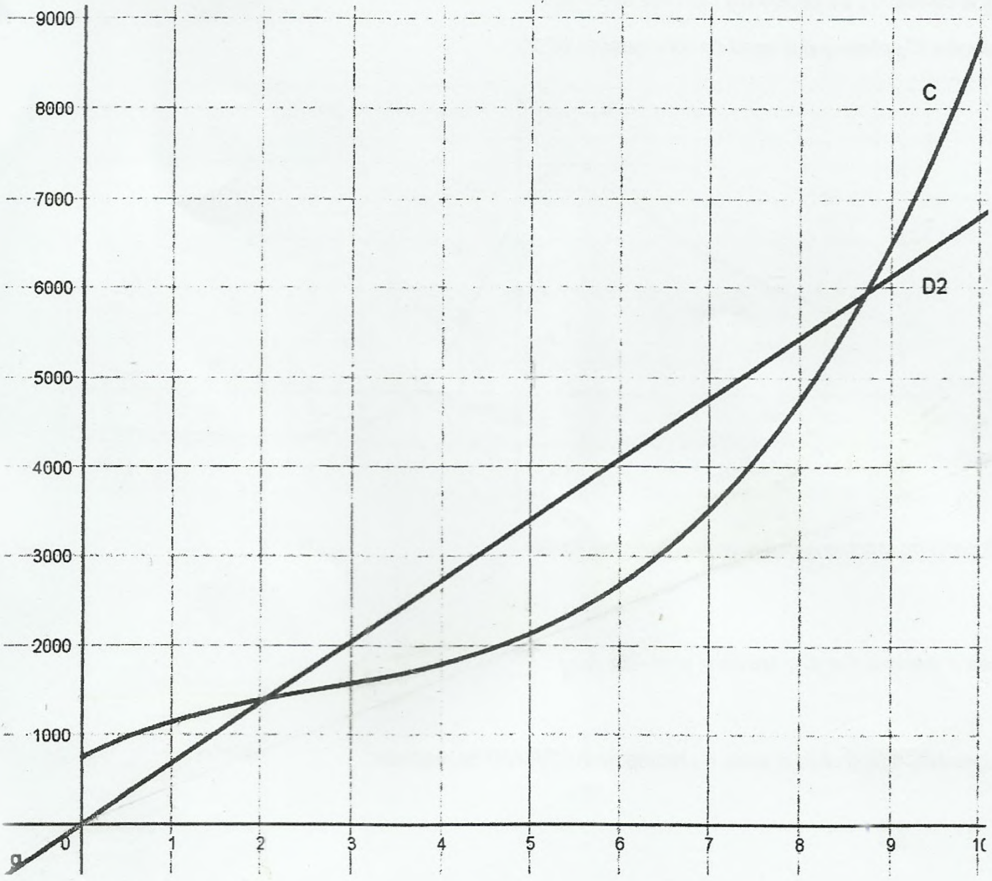
$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

On admet que $$C_M'(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$$

**1. a.** Démontrer que pour tout $x$ appartenant à l'intervalle ]0 ; 10], $C_M'(x)$ est du signe de $(x-5)$. En déduire les variations de la fonction $C_M$ sur l'intervalle ]0 ; 10].

**b.** Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum?
Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

**Annexe 1 (exercice 3) – à rendre avec la copie**



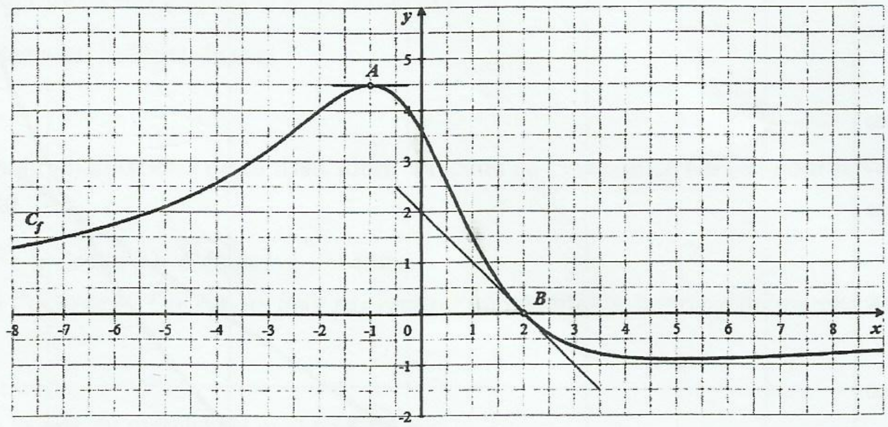
**Exercice 3** *( 7 points)*

**PARTIE A**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $C_f$ d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que :

— la tangente au point $A\left(-1;\dfrac{9}{2}\right)$ à la courbe $C_f$ est parallèle à l'axe des abscisses ;

— La tangente au point $B\,(2;0)$ à la courbe $C_f$ passe par le point de coordonnées $(0;2)$.




On note $f\,'$ la dérivée de la fonction $f$. À partir du graphique et des renseignements fournis :

1. Déterminer $f\,'(-1)$ et $f\,'(2)$.
2. La tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y=-2x+\dfrac{7}{2}$.
   Déterminer $f\,(1)$ et $f\,'(1)$.
3. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en JUSTIFIANT sa réponse :

   a. $f\,'(0)\times f\,'(3)\leqslant 0$.

   b. $f\,'(-3)\times f\,'(1)\leqslant 0$.

**PARTIE B**

La fonction $f$ est définie pour tout réel $x$ par $f\,(x)=\dfrac{18-9x}{x^2+5}$.

1. Montrer que pour tout réel $x$, $f\,'(x)=\dfrac{9\left(x^2-4x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^2}$.

2. 
   a. Étudier le signe de $f\,'(x)$.

   b. Donner le tableau de variations de la fonction $f$.

3. Déterminer une équation de la tangente $(T)$ à la courbe $C_f$ au point d'abscisse $(-2)$.