**Fénelon Ste Marie**

| |
|---|
| **MMES BORDE, BOUIS-SFEZ, LAINE ET PUZENAT** |
| **DTL DE MATHEMATIQUES N°4   T°ES** |
| **19/01/2018** |
| **Durée 3h** |
| **Calculatrices graphiques** |

- ***Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.***

## <u>**Exercice 1**</u> *(7 points)*

Partie A

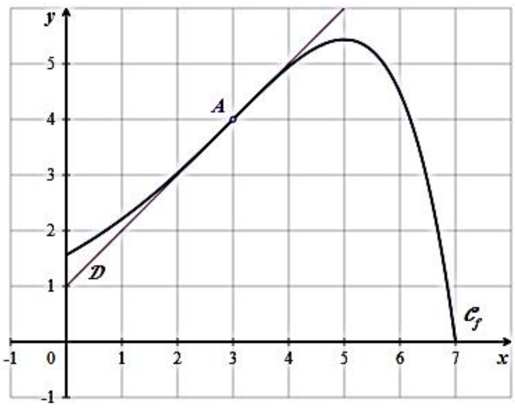
Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle [0 ;7] par $\boldsymbol{f(x) = (ax+b)e^{0,5x-1,5}}$ , où *a* et *b* sont deux nombres réels.

La courbe représentative $C_f$ de la fonction *f* est donnée ci-contre.

On admet que la fonction est dérivable.

On note *f '* sa dérivée.

La droite *D* est tangente à la courbe au point A.




1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(3)$ et de $f'(3)$.
2. Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0; 7]$ on a : $f'(x) = (0{,}5ax + a + 0{,}5b)\mathrm{e}^{0{,}5x-1{,}5}$.
3. 
   a. Déduire des deux questions précédentes, en résolvant un système, que $a = -1$ et $b = 7$.

   b. Donner les expressions de $f(x)$ et de $f'(x)$.
4. 
   a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 7]$.

   b. En déduire le tableau des variations de la fonction $f$ sur ce même intervalle.
5. Montrer que dans l'intervalle $[5; 7]$, l'équation $f(x) = 4$ admet une deuxième solution $\alpha$.

Partie B

Une entreprise fabrique un certain type d'article. Sa capacité de production est limitée à 7 000 articles par jour.

Après avoir fait une étude, le directeur constate que si l'entreprise vend chaque jour $x$ milliers d'articles où $x$ est un nombre de l'intervalle [0 ;7], alors le bénéfice est donné, en milliers d'euros, par la fonction $f$ définie dans la partie A par $f(x) = (7 - x)e^{0,5x-1,5}$.

1. Quelle quantité d'articles l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre afin de réaliser un bénéfice maximal ?

   Quel est alors le montant, arrondi à la centaine d'euros près, de ce bénéfice maximal ?
2. Déterminer l'intervalle à un article près dans lequel doit se situer la production $x$ pour qu'il y ait un bénéfice supérieur ou égal à 4 000 euros.

**Exercice 2** (7 points)

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, par $f(x) = x^2(1 + lnx)$.

1) Montrer que la fonction dérivée de $f$ est définie sur $]0\,;+\infty[$, par : $f'(x) = x(3 + 2lnx)$.
2) a) Résoudre $3 + 2lnx > 0$.
   b) Etudier le signe de la dérivée et en déduire le tableau de variations de $f$.
3) a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   b) En déduire de tableau de signes de $f(x)$.
4) Montrer que pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$, $x^2(1 + lnx) + \frac{1}{2}e^{-3} \geq 0$.

## <u>Exercice 3</u> *(6points)*

*Dans cet exercice, on arrondira les résultats au millième. Les parties A et B sont indépendantes.*

Une étude sur l'ensemble des personnes ayant exercé un emploi en France en 2016 a permis d'établir que :

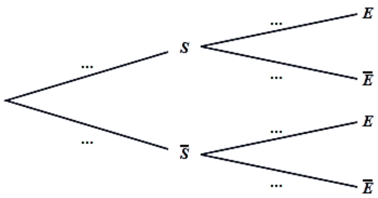
— 30 % des personnes sont âgées de plus de 50 ans ;
— 22,3 % des personnes âgées de plus de 50 ans travaillent à temps partiel ;
— 82,7 % des personnes âgées de moins de 50 ans travaillent à temps plein.

(Source : Insee, enquêtes Emploi.)

### PARTIE A

On interroge au hasard une personne ayant occupé un emploi en 2016 et on note :

— $S$ : l'évènement « la personne était âgée de plus de 50 ans » ;
— $E$ : l'évènement « la personne occupait un emploi à temps plein ».




1. Calculer les probabilités $p\left(\overline{S}\right)$ et $p_{\overline{S}}\left(\overline{E}\right)$.

2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés par les probabilités associées.

3. Calculer $p\left(S \cap \overline{E}\right)$. Interpréter le résultat.

4. Montrer que la probabilité qu'une personne occupe en 2016 un emploi à temps partiel est égale à $0{,}188$.

5. La personne interrogée occupait un emploi à temps partiel. Quelle est la probabilité qu'elle était âgée de plus de 50 ans ?

### PARTIE B

Le taux d'activité est le rapport entre le nombre d'actifs (*actifs occupés et chômeurs*) et l'ensemble de la population correspondante.
En France, le taux d'activité des personnes âgées de 15 à 24 ans est de 36,9 %.

On choisit au hasard 30 personnes âgées de 15 à 24 ans. On note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre d'actifs.
Le nombre de personnes âgées de 15 à 24 ans dans la population est assez grand pour que l'on puisse considérer que $X$ suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

2. Déterminer la probabilité que dans ce groupe il y a exactement 10 actifs.

3. On a calculé ci-dessous, les valeurs des probabilités $P(X \leqslant k)$, pour $k$ allant de 4 à 18.

| $k$ | $P(X \leqslant k)$ | $k$ | $P(X \leqslant k)$ | $k$ | $P(X \leqslant k)$ | $k$ | $P(X \leqslant k)$ | $k$ | $P(X \leqslant k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0,004 2 | 7 | 0,085 5 | 10 | 0,421 1 | 13 | 0,821 7 | 16 | 0,978 4 |
| 5 | 0,014 0 | 8 | 0,165 7 | 11 | 0,570 8 | 14 | 0,901 4 | 17 | 0,991 5 |
| 6 | 0,037 8 | 9 | 0,280 3 | 12 | 0,709 5 | 15 | 0,951 1 | 18 | 0,997 1 |

a. Déterminer la probabilité que dans ce groupe il y ait au moins 15 actifs.

b. Sachant que dans ce groupe, il y a moins de 15 actifs, quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 8 actifs ?